10. Измерение величин

10.1. Понятие о величине и измерении

Изучение различных природных явлений и их закономерностей, использование последних в природопользовании связано с измерением величин.

Величиной называют все то, что может быть выражено количественно, в результате счета.

Измерить какую-либо величину — это значит сравнить ее с другой однородной величиной.

Однородными величинами называют такие, которые характеризуют одно и то же свойство материи и могут отличаться только численно. Так, три метра и 10 сантиметров — величины однородные, обе они характеризуют протяженность материи, например длину каких-либо тел.

Неоднородными величинами являются длина проволоки, масса выбросов и продолжительность солнечного затмения. Сравнивать значения разнородных величин невозможно. Действительно, нельзя ответить на вопрос, что больше — длина проволоки или продолжительность солнечного затмения.

Под единицей измерения однородных величин понимают значение величины, с которой сравнивают все другие значения этой же величины. Так, метр является общепринятой единицей измерения длины.

Единица для измерения выбирается так, чтобы ею удобно было определить величины таких размеров, которые наиболее часто встречаются на практике. Например, метром удобно измерять размеры жилых и производственных зданий, небольших земельных участков, длину мостов, высоту деревьев и т.п. Но для многих измерений метр неудобен. Он слишком мал, в частности, для определения расстояния до небесных тел и слишком велик для размеров элементарных частиц, входящих в состав атомов и атомного ядра. В таких случаях пользуются другими единицами длины, образованными от метра или выбранными независимо от него. Например, расстояние между городами измеряется в километрах, до небесных тел — в парсеках, длина световой волны — в микронах, ангстремах и т.д.

Единицы измерения делят на основные (независимые), производные, кратные и дольные.

Основные единицы не зависят как от однородных ей единиц, так и от единиц измерения других величин. К числу независимых единиц относятся, например, метр, килограмм, секунда, градус, рубль и т.д.

Производные единицы образуются на основе независимых единиц с помощью формул, выражающих те или иные связи (закономерности) между различными неоднородными величинами. К числу производных относятся единицы площади — квадратный метр, ускорения — метр в секунду в квадрате, работы — литр-атмосфера и др. Большинство единиц являются производными.

Кратными единицами называют такие, которые образованы умножением независимых или производных единиц на отвлеченное целое число. *Дольные единицы* получают делением независимых или производных единиц на отвлеченное целое число. Обычно для получения кратных и дольных единиц умножают или делят независимые и производные единицы на десять или на целое число, являющееся степенью при основании десять. Примерами кратных единиц являются километр и киловатт, дольных — сантиметр и наносекунда.

В качестве основных единиц можно выбрать любые, и число их может быть произвольным. Совокупность основных единиц с выведенными из них производными единицами называют *системой единиц*.

В настоящее время в физике, химии, в природоведении в целом принятой к обязательному и официальному применению является Международная система единиц, сокращенно — СИ (система интернациональная). Она построена на шести основных единицах: длины — 1 метр (м); массы — 1 килограмм (кг); времени 1 секунда (с); температуры — 1 Кельвин (К); силы тока — 1 Ампер (А); силы света — 1 свеча (св). Дополнительными единицами системы СИ являются радиан (рад) — единица плоского угла, и стередиан (стер) — единица телесного угла. На основе шести основных единиц с помощью физических законов установлены производные единицы измерения всех других физических величин. Таковыми являются, например, Ньютон (единица силы), Н; Паскаль (Па) — единица давления; Джоуль (Дж) — единица работы; Ватт (Вт) — единица мощности и т.д.

Все остальные единицы измерения не являются в избранной системе основными и производными, т.е. введены независимо от них и называются *внесистемными*. К внесистемным относятся также все кратные и дольные единицы. В системе СИ внесистемны многие широко используемые единицы измерения (километр, ангстрем, киловатт, лошадиная сила, техническая атмосфера, миллиметр ртутного столба и другие).

Численное значение величины получают в результате измерения. *Численное значение* показывает, сколько раз в измеренной величине содержится единица измерения. Результаты измерения выражают именованным числом, т.е., кроме численного значения величины, указывают наименование единицы измерения.

Различают прямые и косвенные измерения.

Прямым называют такое измерение, при котором значение величины определяют непосредственным сравнением с ее единицей измерения. Примером его является измерение длины куска ткани прикладыванием к нему метра. Однако прямое измерение далеко не всегда дает достаточно точные результаты, не всегда выполнимо и удобно. Например, недостаточно удобно и точно непосредственное измерение длины l окружности. Удобнее измерять не саму окружность, а ее диаметр d, а значение d умножить на число π, равное 3,14. В данном случае для определения длины окружности будет использовано косвенное измерение по формуле $l = \pi d$.

Косвенным называют такое измерение, при котором численное значение величины находят по формуле путем вычисления.

На практике (и в науке, и в технике) чаще всего выполняют косвенные измерения.

10.2. Математическая оценка точности измерения

В силу объективных и субъективных обстоятельств данные измерений, как правило, отличаются от истинных величин. Ошибки при измерении возникают из-за неточности измерительных приборов, зависят от индивидуальных особенностей измеряющего, например внимательности, остроты зрения и многих других трудно улавливаемых причин. Это могут быть незначительные колебания температуры и влажности воздуха, попадание соринок на взвешиваемый предмет и т.п. Такие ошибки при каждом измерении случайны и в принципе не устранимы. Точными могут быть только числа, полученные в результате счета предметов, когда их немного и количество их не изменяется, пока проводится счет. Поэтому измерения должны сопровождаться расчетом точности полученных результатов, определением ошибки измерения.

10.2.1. Ошибки прямого измерения

Ошибки, обусловленные неточностью измерительного прибора, легко учитываются, так как наибольшая ошибка прибора на нем указывается. Если такого указания нет, то ошибку считают равной половине цены наименьшего деления на шкале прибора. Например, при измерении длины миллиметровой линейкой ошибку можно считать равной 0,5 мм, при взвешивании на торговых весах при цене деления 20 г ошибка равна 10 г и т.д.

Случайные ошибки, как будет сказано далее, можно уменьшить повторением измерений.

В любом случае в результате ошибок возникает погрешность измерения, т.е. отклонение измеренной величины от точного значения.

Различают абсолютную погрешность (ошибку) и относительную погрешность (ошибку) измерения.

Абсолютная ошибка, или погрешность ε, является разностью между точным (истинным) и приближенным значениями исследуемой величины. Она равна:

$$\varepsilon = x - a\ , \tag{10.1}$$

где x — точное значение, a — приближенное значение.

Точное значение x измеряемой величины не известно. Его заменяют средним арифметическим $a_{ср}$ измерения, повторенного несколько раз. В общем виде для n измерений:

$$a_{ср} = \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i}{n}, \quad \text{где} \tag{10.2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} a = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n\ . \tag{10.3}$$

За абсолютную погрешность значения величины a, полученную в результате нескольких измерений, принимают среднее арифметическое модулей значений всех погрешностей, т.е. не учитывают знак (+ или −) последних:

$$\varepsilon_{ср} = \frac{\sum_{i=1}^{n} |\varepsilon_i|}{n}\ . \tag{10.4}$$

Поскольку отклонения приближенного значения величины от ее среднего арифметического могут быть как в большую, так и в меньшую сторону, то результат измерений записывают так:

$$a = a_{ср} \pm \varepsilon_{ср}\ . \tag{10.5}$$

Это означает, что a находится в следующем интервале:

$$a_{ср} + \varepsilon_{ср} \geq a_{ср} \geq a_{ср} - \varepsilon_{ср}\ . \tag{10.6}$$

Отметим, что абсолютная погрешность — всегда число именованное, имеющее ту же единицу измерения, что и измеряемая величина.

При записи результатов измерений следует указывать величину абсолютной ошибки, например 1715 ± 4. При этом в величине среднего не должно быть знаков меньшего разряда, чем величина погрешности. Так, бессмысленно указывать массу с точностью до десятых долей килограмма (например, 1715,5), если точность определения составляет килограммы. Отметим, что предпоследняя цифра (5) также недостоверна, так как может быть равна 1 и 9. Поскольку в этом приближенном числе ошибка составляет меньше половины от десятичного разряда, то число целых десятков будет условно считаться последней верной цифрой в приближенном числе.

Любая из значащих цифр числа *a* называется «верной», если абсолютная погрешность измерения не превосходит пяти единиц разряда, следующего за этой цифрой. В расчетах с приближенными числами принято сохранять 1-2 сомнительные цифры, а в конечном результате сомнительные цифры могут быть округлены. Погрешность округления складывается с абсолютной погрешностью. Число 1715 можно записать и без абсолютной ошибки, указав только верные цифры: 1710. Такую запись следует понимать так, что ошибка в числе не превышает половины разряда последней верной цифры, т.е. пяти. Иными словами, величина последней верной цифры в измерении должна превышать минимум вдвое абсолютную ошибку. Поэтому для числа 1715 ± 6, имеющего ошибки уже в десятичном разряде, правильнее записать 1710 ± 10, поскольку писать в этом случае разряд единиц бессмысленно. Последней верной цифрой в этом числе является 7, и без указания погрешности его следует записать как 1700, полагая, что его ошибка не превышает $\pm$ 50.

Количество значащих цифр в числе не зависит от положения запятой в нем. Например, имеют равное количество значащих цифр числа 12,3 см, 123 мм или 0,123 м. Отсюда следует, что нули с левой стороны числа к значащим цифрам не относятся. Так как от положения запятой точность приближенного числа не зависит, то целесообразно ставить в нем запятую после первой цифры слева и умножать на 10 в нужной степени, чтобы сохранить его величину. Так, вместо 12 см лучше записать $1{,}2 \cdot 10$ см, взамен 0,0543 кг сделать запись $5{,}43 \cdot 10^{-2}$ кг. При такой записи сразу видно число значащих цифр, и при действиях с приближенными числами легко установить их порядок в ответе. Отметим также, что если значащие цифры после запятой заканчиваются нулями, то это показывает, что соответствующие порядки числа измерялись, но их не оказалось. Такие нули относятся в верным цифрам, и отбрасывать их нельзя, как, например, в числе $1{,}2 \cdot 10^2$.

Абсолютная погрешность не дает полного представления о точности измерения. Величина оценивается еще и *относительной погрешностью* измерения, которой называют число, показывающее, сколько процентов составляет погрешность от измеренной величины:

$$\delta = \frac{\varepsilon}{x} 100. \qquad (10.7)$$

Поскольку истинное значение x измеряемой величины не известно, то в формуле (10.7) взамен x, ε берут их средние арифметические значения. Если не требуется большой точности, то в технике считают допустимой погрешность, не превышающую 5%.

При введении понятий об абсолютной и относительной ошибках исходят из того, что результаты измерений не содержат систематических ошибок. Систематическая ошибка вызывается постоянно действующей причиной, и величина ошибки либо одинакова во всех измерениях, либо изменяется по определенному известному закону. Поэтому систематические ошибки могут быть устранены путем выверки и настройки измерительного прибора или введением соответствующих поправок к результатам измерения.

Остающиеся после устранения систематических ошибок случайные ошибки хотя и не устранимы, но, в принципе, могут быть снижены до любой наперед заданной величины. Это вытекает из основного постулата теории ошибок, который гласит, что при прямых измерениях случайная ошибка следует нормальному закону распределения вероятностей. Решающим доводом в пользу нормального закона распределения случайных ошибок является его практическое подтверждение анализом многочисленных опытов и наблюдений.

Поскольку случайные ошибки подчиняются нормальному закону распределения вероятностей, то из этого следует, что при достаточно большом числе измерений:

случайные погрешности, численно равные по величине, но противоположные по знаку, встречаются одинаково часто;

чем больше случайная погрешность, тем меньше вероятность ее появления.

При бесконечно большом числе измерений истинное значение измеряемой величины равно среднеарифметическому значению всех результатов измерений, а появление того или иного результата единичного измерения как случайного события описывается нормальным законом распределения.

Отметим при этом, что, используя понятия «ошибка измерения» и «погрешность измерения», автор считает их идентичными, хотя известна и другая точка зрения. В соответствии с нею, научные сотрудники, не улавливающие разницы между данными понятиями, недостаточно профессиональны. Между тем оба они суть французского «ereur» и английского «error», что в русском переводе означает «ошибка», «погрешность».

На особенностях нормального закона распределения основаны расчеты точности прямых измерений. Не останавливаясь более на теории вопроса, приведем формулы, используемые для оценки точности измерений и повышения степени их достоверности.

10.2.2. Оценка точности прямого измерения

Если несколько измерений одной величины производится с одинаковой точностью, то наиболее вероятным значением ее является среднеарифметическое.

Точность измерений принято определять тремя показателями: средней квадратичной ошибкой, вероятной ошибкой, средней ошибкой измерений. При этом различают ошибки единичного измерения и ошибки измерения среднего арифметического.

Средняя квадратичная ошибка единичного результата равна:

$$\sigma = \pm\sqrt{\frac{\sum \varepsilon_i^2}{n-1}}, \tag{10.8}$$

где σ_i — отклонение результатов отдельных измерений от их среднеарифметического; n — число измерений.

Средняя ошибка η единичного измерения — это среднее арифметическое абсолютных величин всех случайных ошибок данного ряда n измерений. Установлена ее связь со среднеквадратичной ошибкой:

$$\eta = \pm 0{,}8\sigma = \pm 0{,}8\sqrt{\frac{\sum \varepsilon_i^2}{n-1}}. \tag{10.9}$$

Вероятная ошибка ρ измерения единичного результата делит все случайные ошибки данного ряда n измерений на две равные части. В одной части находится $n/2$ случайных ошибок, больших вероятной ошибки ρ, а в другое — $n/2$ случайных ошибок, меньших ρ:

$$\rho = \pm 0{,}6745\sqrt{\frac{\sum \varepsilon_i^2}{n-1}}. \tag{10.10}$$

Формулы (10.8)-(10.10) показывают величину той или иной ошибки, которую следует ожидать при выполнении очередного единичного замера.

При оценке окончательной точности измерений принято указывать не ошибку отдельных измерений, а ошибку их среднего арифметического, т.е. окончательного результата измерений.

Средняя квадратичная ошибка σ_A среднего арифметического:

$$\sigma_{\mathrm{A}} = \pm\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \pm\sqrt{\frac{\sum \varepsilon_i^2}{n(n-1)}}. \tag{10.11}$$

Вероятная ошибка ρ_A среднего арифметического:

$$\rho_A = \pm 0{,}6745 \sqrt{\frac{\sum \varepsilon_i^2}{n(n-1)}}. \tag{10.12}$$

Средняя арифметическая ошибка η_A среднего арифметического:

$$\eta_A = \pm 0{,}8 \sqrt{\frac{\sum \varepsilon_i^2}{n(n-1)}}. \tag{10.13}$$

Поскольку оценка погрешностей выполнена, исходя из представления об их случайном вероятностном распределении, то формулы справедливы при статистически значимом числе измерений. В обычных технологических испытаниях при их точности на уровне ±5% оно составляет не менее 10. Если требуется большая точность, количество измерений увеличивают до 30-50.

Легче всего вычислить среднюю ошибку отдельного измерения, однако большую информацию содержат значения среднеарифметических ошибок. Действительно, как отмечалось выше, из нормального закона их распределения следует, что чем больше случайная погрешность, тем менее вероятно ее появление. Ниже показана связь между вероятностью отклонения измеренной величины от ее истинного значения и среднеквадратичной ошибкой.

Суммарные отклонения от среднего, $\pm\sigma$	0,5	0,674	1	2	3	4
Вероятность отклонения, %	38	50	68	95	99,7	99,99
Критерий Райта, N	1	2	3	22	370	15625

Критерий Райта показывает сколько необходимо выполнить случайных измерений, чтобы среди них появилось одно измерение, превышающее заданное. Как видно, количество измерений с отклонениями сверх трех и тем более четырех сигм весьма незначительно и не превышает соответственно 0,3 и 0,01%. Принято считать, что измерения с отклонениями от среднего более трех сигм вызваны грубыми случайными ошибками и являются промахами. При обнаружении i промахов в ряде n измерений их исключают из рассмотрения и повторяют расчеты ошибок для оставшихся (n-i) измерений.

10.2.3. Оценка точности косвенных измерений

Значения косвенных измерений, в соответствии с определением последних, получают из формул, путем вычислений. В формулу входят минимум два члена, каждый из которых, даже если он зафиксирован прямым измерением, является числом приближенным, имеющим ту или иную погрешность. Отсюда следует, что оценка точности косвенных измерений сводится к действиям с приближенными числами.

Чтобы определить точность косвенных измерений, необходимо знать ошибки измерений всех членов формулы. Здесь можно встретить два случая: члены формулы — неоднородные величины и члены формулы — однородные величины.

В случае, когда члены формулы представлены неоднородными несравниваемыми величинами, имеющими различные единицы измерения, нельзя каким-либо образом сравнивать именованные абсолютные ошибки неоднородных величин, входящих в формулу. Возможность сравнения ошибок измерения разнородных величин появляется в случае представления ошибок не в именованной, а в безразмерной форме, т.е. как ошибок относительных. Абсолютная же ошибка косвенного измерения определяется по величине относительной ошибки после расчета последней.

В случае, когда члены формулы однородны, возможен расчет по формуле и абсолютной ошибки измерения. Имеется в виду, например, оценка абсолютной погрешности общей массы партии мяса, состоящей из отдельных туш, абсолютная погрешность взвешивания каждой из которых известна.

При оценке ошибок членов косвенного измерения, знак ошибки которого всегда неизвестен, исходят из того, что может встретиться наиболее неблагоприятный случай, т.е. все ошибки измерений членов формулы имеют один и тот же знак. На основании этой исходной посылки сформулированы правила (теоремы), позволяющие определить ошибки косвенных измерений, оценить погрешность действий над приближенными числами.

Абсолютная ошибка суммы или *разности* приближенных чисел равна сумме абсолютных значений абсолютных ошибок входящих в них членов:

$$\varepsilon = \pm\left(\left|\varepsilon_1\right| + \left|\varepsilon_2\right| + \ldots \left|\varepsilon_n\right|\right). \qquad (10.14)$$

Величина ε в уравнении (10.14) называется *абсолютной предельной ошибкой*.

Относительная ошибка суммы, тоже предельная, составляет:

$$\delta_{\text{пр}} = \pm \frac{\left|\varepsilon_1\right| + \left|\varepsilon_2\right| + \ldots \left|\varepsilon_n\right|}{a_1 + a_2 + \ldots a_n}. \qquad (10.15)$$

Она лежит в границах между наибольшими и наименьшими относительными ошибками слагаемых:

$$\delta_{\max} > \delta_{\text{пр}} > \delta_{\min}. \quad (10.16)$$

Предельная относительная ошибка разности приближенных чисел равна:

$$\delta_{\text{пр}} = \pm \frac{|\varepsilon_1| + |\varepsilon_2|}{a_1 - a_2}. \quad (10.17)$$

В этом случае можно получить весьма большую относительную ошибку разности даже при малых ошибках отдельных ее членов.

Относительная ошибка произведения приближенных чисел равна арифметической сумме относительных ошибок всех сомножителей:

$$\delta_{\text{пр}} = \pm(|\delta_1| + |\delta_2| + \ldots |\delta_n|). \quad (10.18)$$

Абсолютная ошибка произведения приближенных чисел составляет сумму относительных ошибок сомножителей, умноженную на произведение:

$$\varepsilon_{\text{пр}} = \pm(|\delta_1| + |\delta_2| + \ldots |\delta_n|) A_1 A_2 \ldots A_n. \quad (10.19)$$

Относительная ошибка дроби равна арифметической сумме относительных ошибок числителя и знаменателя:

$$\delta_{\text{др}} = \pm(|\delta_1| + |\delta_2| + \ldots |\delta_n|). \quad (10.20)$$

Абсолютная ошибка дроби составляет:

$$\varepsilon_{\text{др}} = \pm \delta_{\text{др}} \frac{A_1}{A_2}. \quad (10.21)$$

Относительная ошибка степени равна абсолютному значению показателя степени, умноженному на относительную ошибку основания:

$$\delta_{\text{ст}} = \pm n\delta. \quad (10.22)$$

Так, в примере $x = a^{-n/m}$ имеем $\delta_{\text{ст}} = \frac{n}{m}\delta$.

Абсолютная ошибка степени вычисляется по формуле:

$$\varepsilon_{cm} = \pm n\delta A^n. \quad (10.23)$$

При извлечении корня относительная ошибка равна:

$$\delta_{\text{к}} = \pm \frac{1}{n}\delta. \quad (10.24)$$

Абсолютная ошибка в этом случае составляет:

$$\varepsilon_{к} = \pm \frac{1}{n} \delta A^{1/n}. \qquad (10.25)$$

Приведем пример вычисления относительной ошибки косвенных измерений. Пусть $x = a^2 \sqrt[3]{b} / c^4 \sqrt{d^3}$. Тогда на основании формул (10.18), (10.20), (10.22), (10.24) получаем:

$\delta = 2\delta_a + 1/3\delta_b + 4\delta_c + 3/2\delta_d$.

Здесь индексы δ — относительные ошибки соответствующих членов формулы.

Анализ вычисленных ошибок конечного результата показывает, что:

точность окончательного результата не может быть больше точности одного из промежуточных измерений;

ошибка результата может в основном определяться ошибкой наименее точно измеряемой величины.

Выявив структуру погрешностей косвенного измерения и найдя наибольшую из них, необходимо постараться прежде всего уменьшить последнюю: повысить количество замеров наиболее неточного параметра, использовав более совершенные методики и приборы, выразить этот параметр через другие, определяемые с гораздо меньшей погрешностью, и т.д.

В практической работе в ряде случаев точного учета ошибок измерений не требуется или они не известны. В этом случае следует придерживаться правила, в соответствии с которым при действиях с приближенными числами необходимо оперировать только членами с верными цифрами. При этом в ответе сохраняется столько верных цифр, сколько содержится в числе с их наименьшим количеством. Например, при делении числа 5,74 на 1,2 получаем 4,783..., но достаточно записать 4,8. При умножении этих чисел имеем 6,88, число, которое следует округлить до 6,9. Как следует из примеров, округление сомнительных цифр производится в сторону ближайшей верной цифры. Если сомнительная цифра равна пяти (середина разряда), округление производится до ближайшей четной верной цифры. Так, числа 6,85 и 6,75 следует округлить 6,8.

Необходимо отметить, что количество верных цифр сохраняется и при умножении (или делении) числа на десять или степень с основанием десять. Таким образом, равнозначимыми являются числа 4,8 и $4{,}8 \cdot 10$, $4{,}8 \cdot 10^2$, $4{,}8 \cdot 10^n$ или, соответственно $4{,}8 \cdot 10^{-n}$ и т.д.